

OMOTETIE

Se nelle equazioni (1) di una similitudine poniamo $\alpha=0$ otteniamo:

$$(3) \quad \begin{cases} X = kx + p \\ Y = ky + q \end{cases};$$

tali equazioni rappresentano le equazioni di una omotetia a patto che la trasformazione da esse rappresentata abbia uno ed un solo punto unito; ciò accade, come facilmente si verifica, se, risulta $k \neq 1$ (e anche $k > 0$ trattandosi di una similitudine); infatti:

$$\begin{cases} x = kx + p \\ y = ky + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-k)x = p \\ (1-k)y = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{1-k} \\ y = \frac{q}{1-k} \end{cases} \quad \text{dunque la trasformazione considerata ammette uno}$$

ed un solo punto unito se $1-k \neq 0$, ovvero se $k \neq 1$.

Se invece risulta $k=1$ allora le equazioni (3), come facilmente si comprende, rappresentano una traslazione (trasformazione priva di punti uniti) di vettore $v(p,q)$ se almeno uno fra i valori di p e q è diverso da zero (se p vel $q \neq 0$), l'identità (o trasformazione identica) avente come punti uniti: tutti i punti del piano se $p=q=0$.

Riepilogando possiamo dire che le equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} X = kx + p \\ Y = ky + q \end{cases}$$

con $k > 0$ e $k \neq 1$ rappresentano un'omotetia di centro $C\left(\frac{p}{1-k}, \frac{q}{1-k}\right)$ (il centro di un'omotetia è il suo unico punto unito) e rapporto k . Tale omotetia essendo stata ricavata da una similitudine diretta è una omotetia diretta. Il numero k , detto rapporto di omotetia rappresenta il rapporto costante fra segmenti corrispondenti.

Se invece nelle equazioni (1) di una similitudine poniamo $\alpha=\pi$ otteniamo:

$$(4) \quad \begin{cases} X = -kx + p \\ Y = -ky + q \end{cases};$$

posto $h=-k$ le (4) diventano:

$$(5) \quad \begin{cases} X = hx + p \\ Y = hy + q \end{cases}$$

con $h < 0$ (essendo $k > 0$ poiché rapporto di similitudine).

Tali equazioni rappresentano le equazioni di una omotetia a patto che la trasformazione da esse rappresentata abbia uno ed un solo punto unito; ciò accade, come facilmente si verifica, per ogni valore negativo di h (cioè sempre); infatti:

$$\begin{cases} x = hx + p \\ y = hy + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-h)x = p \\ (1-h)y = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{1-h} \\ y = \frac{q}{1-h} \end{cases} \quad \text{dunque la trasformazione considerata ammette uno}$$

ed un solo punto unito se $1-h \neq 0$, ovvero se $h \neq 1$, ma ciò accade sicuramente essendo nelle (5) $h < 0$. Anche in questo caso l'omotetia, essendo stata ricavata da una similitudine diretta, è una omotetia diretta di rapporto $k=-h$. Tale rapporto, come al solito, rappresenta il rapporto costante fra due segmenti corrispondenti.

Mentre le (4) definiscono un'omotetia che ad un punto P diverso dal suo centro O fa corrispondere un punto P' che si trova dalla stessa parte di P rispetto ad O , le (5) definiscono un'omotetia che ad un punto P diverso dal suo centro O fa corrispondere un punto P' che si trova dalla parte opposta di

P rispetto ad O. Ecco perché talune volte si usa dire, impropriamente, che le omotetie di equazioni (4) sono omotetie dirette, mentre quelle di equazioni (5) sono omotetie inverse.

Ribadiamo invece che le omotetie sono sempre dirette (essendo particolari similitudini dirette), pertanto conservano l'orientamento.

Le omotetie con $k > 1$ e quelle con $h < -1$ sono degli "ingrandimenti", quelle con $0 < k < 1$ e quelle con $-1 < h < 0$ sono delle "riduzioni".

Osserviamo infine che se nelle (5) poniamo $h = -1$ otteniamo:

$$(6) \begin{cases} X = -x + p \\ Y = -y + q \end{cases}$$

che sono le equazioni di una simmetria centrale il cui unico punto unito è il centro $C\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$. Alla

luce di quanto detto possiamo affermare che le simmetrie centrali sono delle particolari omotetie di rapporto $k = -1$ (rapporto costante fra segmenti corrispondenti) e che come tutte le omotetie sono delle trasformazioni dirette (conservano cioè l'ordinamento).