ISOMETRIE NEL PIANO

Definizione: *Si chiama isomeria (o congruenza o movimento rigido) piana ogni similitudine di rapporto* 1.
Ponendo nelle equazioni (1) e (2) delle similitudini k=1 si hanno le *isometrie,* rispettivamente, *dirette e inverse*.
Per k=1 le (1) diventano:

$$(7)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha - y sen\alpha + p \\ Y = x sen\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}$$

che sono le equazioni delle *isometrie dirette* o *rototraslazioni.*
Per α=0 si ha la *traslazione*:

$$(8)\quad \begin{cases} X = x + p \\ Y = y + q \end{cases}.$$

Per p=q=0 si ha la *rotazione*:

$$(9)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha - y sen\alpha \\ Y = x sen\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

con il centro nell'origine delle coordinate e ampiezza α.
Per α=π , dalle (9) si hanno le equazioni della *simmetria centrale* di centro O:

$$(10)\quad \begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}.$$

Per k=1 le (2) diventano:

$$(11)\quad \begin{cases} X = x\cos\alpha + y sen\alpha + p \\ Y = x sen\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases}$$

che sono le equazioni delle *isometrie inverse*.
Per p=q=α=0 le (11) ci danno:

$$(12)\quad \begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases}$$

che sono le equazioni della *simmetria assiale di asse x.*
Per p=q=0 e α=π le (11) ci danno invece:

$$(13)\quad \begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$$

che sono le equazioni della *simmetria assiale di asse y.*
Osservazione: Per quanto detto risulta chiaro che le equazioni:

$$(14)\quad \begin{cases} X = ax + by + p \\ Y = cx + dy + q \end{cases}$$

individuano un'isometria sse

$$(15)\quad \begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}.$$

e che :

- se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=1, l'isometria è diretta;
- se invece $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -1$, l'isometria è inversa.