Equazioni di 2° grado

Tipi di equazioni:

Un'equazione (ad una incognita) è di 2° grado se può essere scritta nella forma generale (o *forma tipica* o ancora *forma* canonica):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a, b e c numeri reali (però a≠0) oppure espressioni letterali che rappresentano numeri noti (in tal caso l'equazione è detta letterale o parametrica). Un'equazione di 2° grado ridotta alla forma canonica si dice:

1) **completa** quando i tre coefficienti a, b, e c sono tutti diversi da zero ($ax^2 + bx + c = 0$);

2) **pura** quando b vale zero ($ax^2 + c = 0$);

3) **spuria** quando c vale zero ($ax^2 + bx = 0$).

1) Completa:

Si risolve adoperando la seguente formula risolutiva:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ (formula normale)

Se la *b* è pari si può usare la seguente formula risolutiva:

$$\mathbf{x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$ (formula ridotta)

Esempio 1:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Esempio 2:

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)}$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$x_{1,2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

2) Pura:

Si risolve portando al primo membro il termine con la *x* e al secondo il termine noto. Dopo si trova la radice quadrata del termine noto.

Esempio 1:

Esempio 2:

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

$5x^2 + 25 = 0$

$5x^2 = -25$

$\frac{5x^2}{5} = \frac{-25}{5}$

$x^2 = -25$

$x = \sqrt{-25}$

Se si ottiene la radice di un numero negativo, che risulterà essere un numero immaginario:

$x = \sqrt{25 \cdot (-1)}$

$x = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm 5i$

essendo i l'unità immaginaria, ovvero la radice quadrata di -1

3) Spuria:

Si risolve raccogliendo tutta l'equazione e poi procedendo secondo la legge di annullamento del prodotto, per la quale un prodotto è uguale a zero se almeno un fattore è zero. Quindi una soluzione sarà sempre zero.

Esempio 1:

$7x^2 - 14x = 0$

$7x(x - 2) = 0$

$7x = 0 \Leftrightarrow \quad x = 0$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 2$

Esempio 2:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x = 0$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow \quad x = 3$

Le soluzioni di un'equazione di 2° grado:

La formula risolutiva di un'equazione di secondo grado si può anche scrivere: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il Δ (discriminante) serve a stabilire il tipo di soluzioni dell'equazione:

Se $\Delta > 0$ allora le soluzioni sono reali e distinte;

Se $\Delta = 0$ allora le soluzioni sono reali e coincidenti ($x_z = x_2$);

Se $\Delta < 0$ allora le soluzioni sono complesse coniugate ($x_{1,2} = a \pm ib$).

Esempio 1:

Esempio 2:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5)$

$\Delta = 36 - 20$

$\Delta = 16$

Quindi le soluzioni sono reali e distinte

$x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = 9 - 16$

$\Delta = -7$

Quindi le soluzioni sono complesse coniugate.

Somma e prodotto delle soluzioni

$s = x_1 + x_2$ e

$p = x_1 \cdot x_2$

La somma e il prodotto delle soluzioni si possono trovare anche con le seguenti formule:

$\mathbf{s} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$

Inoltre sapendo la somma e il prodotto delle soluzioni si può ricavare l'equazione da cui derivano con la seguente formula:

$\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$

Da tutto ciò si può dedurre che:

-si può calcolare il valore di due numeri, nota la loro somma e il loro prodotto

Esempio:
Dato:

$s = 5$

$p = 4$

si ottiene:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

-sapendo le soluzioni di un'equazione si può ricavare l'equazione da cui derivano:
Esempio:
Dato:

$x_1 = -3$

$x_2 = 5$

Si ottiene:

$s = 2$

$p = -15$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

Scomposizione di un trinomi di secondo grado
(forma canonica dell'equazione di 2° grado)

Un trinomio di secondo grado può essere scomposto con la seguente formula:

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}}$$

essendo x_1 e x_2 soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Esempio:
Dato il trinomio

$6x^2 - 5x + 1$

Risolvendo l'equazione associata, si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Pertanto:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x - 2)(x - 3)$$

Regola di Cartesio

La regola di Cartesio serve a determinare i segni delle soluzioni di un'equazione. Si può applicare solo se le soluzioni sono reali, ovvero quando $\boldsymbol{\Delta \geq 0}$.
Per determinare i segni delle soluzioni si esaminano i segni dei coefficienti dell'equazione (scritta in forma canonica) seguendo il seguente criterio:
Variazione di segno: radice positiva
Permanenza di segno: radice negativa

Esempio 1:

$$3x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-3)$$

$$\Delta = 25 + 36$$

$$\Delta = 61$$

Si può applicare la Regola di Cartesio.
Esaminiamo i segni:
\+ + - ovvero 1 permanenza, 1 variazione
Le soluzioni (o radici) saranno una negativa e una positiva.

Esempio 2:

$$2x - 3x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5)$$

$$\Delta = 9 - 40$$

$$\Delta = -31$$

La regola di Cartesio non può essere applicata.

Le equazioni di secondo grado fratte

Si segue il normale criterio, ricordando però di mettere le condizioni di accettabilità.

Esempio:

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x-5}=3-5\frac{x-2}{x-1}$$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x-5}=3-\frac{5x-10}{x-1}$$

$$\frac{x(x-5)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-5)}=\frac{3(x-1)(x-5)-(5x-10)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$$

C.A.

$x \neq 1$

$x \neq 5$

$$2x^2-7x+1=3x^2-15x-3x+15-5x^2+25x+10x-50$$

$$4x^2-24x+36=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-24)\pm\sqrt{(24)^2-4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{576-576}}{8}$$

$$x_{1,2}=\frac{24}{8}=3$$

Esempio di riepilogo

Data la seguente equazione:

$$\frac{(x+1)(x+2)}{5}-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-3=0$$

a) trovare la forma canonica:

$$\frac{2(x+1)(x+2)-5(x-1)(x-2)-3(10)}{10}=0$$

$$(2x+2)(x+2)-(5x-5)(x-2)-30=0$$

$$2x^2+4x+2x+4-5x^2+10x+5x-10-30=0$$

$$-3x^2+21x-36=0$$

divido tutto per - 3 e ottengo :

$$x^2-7x+12=0 \text{ (forma canonica)}$$

b) determinare i segni delle soluzioni dell'equazione (regola di Cartesio):

$$\Delta=(7)^2-4(12)(1)$$

$$\Delta=49-48$$

$$\Delta=1$$

Quindi si può applicare la regola di Cartesio.
Esaminiamo i segni: + - + ovvero 2 variazioni
Quindi le soluzioni saranno entrambe positive.

c) trovare le soluzioni dell'equazione:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

d) trovare la somma e il prodotto delle soluzioni:

$$s = -\frac{(-7)}{1} = 7$$

$$p = \frac{12}{1} = 12$$

e) scomporre l'equazione:

$$x^2 - 7x + 12 = 1(x - 3)(x - 4)$$

Equazioni di secondo grado parametriche

Si dicono equazioni parametriche le equazioni che contengono una o più lettere dette *parametri*. Queste equazioni danno risultati che variano a seconda del valore attribuito al/ai parametro/i. Quindi non essendoci soluzioni definite, si applica una discussione che ha inizio dopo aver portato l'equazione alla forma canonica.

Esempio per portare un equazione di secondo grado parametrica alla forma canonica:

$$k(k - 3) + 11x = 10 - x(6x - 5k)$$

$$k^2 - 3k + 11x = 10 - 6x^2 + 5kx$$

$$k^2 - 3k + 11x - 10 + 6x^2 - 5kx = 0$$

$$6x^2 + (11 - 5k)x + k^2 - 3k - 10 = 0 \text{ (forma canonica)}$$

In questo caso *a*, *b*, *c* della forma canonica $ax^2 + bx + c = 0$ saranno:

$$a = 6$$

$$b = 11 - 5k$$

$$c = k^2 - 3k - 10$$

Una volta trovata la forma canonica ha inizio la discussione che varia a seconda delle richieste dell'esercizio da svolgere. Si possono trovare però dei punti generali:

- Se l'esercizio chiede di trovare **il valore di *x* in funzione di un *k* determinato**, bisogna sostituire il valore assegnato a k nella forma canonica.

Esempio:
Data l'equazione

$$(k-1)x^2+2(-k+2)x+k+1=0$$

e dato il valore $k=-1$, trovare il valore di x **:**

$$(-1-1)x^2+2(1+2)x-1+1=0$$

$$-2x^2+6x=0$$

$$-2x(x-3)=0$$

$$x=0$$

$$x=3$$

- Se l'esercizio chiede di trovare **il valore di *k* in funzione di un *x* determinato**, bisogna sostituire il valore assegnato a x nella forma canonica.

Esempio:
Data l'equazione

$$(2-k)x^2-(4k+1)x+k+3=0$$

e dato il valore x $=4$, trovate il valore di k **:**

$$(2-k)16-(4k+1)4+k+3=0$$

$$32-16k-16k-4+k+3=0$$

$$-31k+31=0$$

$$\frac{-31k}{-31}=\frac{-31}{-31}$$

$$k=1$$

- Se l'esercizio chiede di trovare il valore di k affinché **le soluzioni siano opposte** ovvero $x_1=-x_2$, quindi $x_1+x_2=0$, cioè la loro somma è zero, poiché la Somma è $-\frac{b}{a}$, possiamo dire che $-\frac{b}{a}=0$, bisogna quindi trovare quando la somma nell'equazione assegnata è uguale a zero e il risultato ottenuto sarà il valore di k che l'esercizio chiedeva.

Esempio:
Data l'equazione :

$$(k-1)x^2-2(k+3)x+k-3=0$$

determinare il valore di k affinchè risulti $x_1=-x_2$

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-2(k+3)}{k-1}$$

$$-\frac{-2(k+3)}{k-1}=0$$

$$\frac{2k+6}{k-1}=0$$

$$2k=-6$$

$$k=-3$$

- Se l'esercizio chiede di trovare il valore di *k* affinché risulti $x_1 + x_2 = n$, poiché la Somma è $-\frac{b}{a}$, possiamo dire che $-\frac{b}{a} = n$, bisogna quindi imporre che la somma nell'equazione assegnata sia uguale a *n* e il risultato ottenuto sarà il valore di *k* che l'esercizio chiedeva.

Esempio:

Data l'equazione:

$$(k-1)x^2 + 2(-k+2)x + k + 1 = 0$$

determinare il valore di *k* affinchè risulti $x_1 + x_2 = -\frac{2}{5}$

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2(-k+2)}{k-1}$$

$$\frac{-2(-k+2)}{k-1} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{-10(-k+2)}{5(k-1)} = \frac{-2k+2}{5(k-1)}$$

$$10k - 20 + 2k - 2 = 0$$

$$12k = 22$$

$$k = \frac{11}{6}$$

- Se l'esercizio chiede di trovare il valore di *k* affinché **le soluzioni siano una l'inversa dell'altra,** ovvero $x_1 = \frac{1}{x_2}$, quindi $x_1 \cdot x_2 = 1$ (prodotto delle soluzioni uguale ad uno), poiché il Prodotto è $\frac{c}{a}$, possiamo dire che $\frac{c}{a} = 1$. Bisogna quindi trovare quando il prodotto nell'equazione assegnata è uguale a uno e il risultato ottenuto sarà il valore di *k* che l'esercizio chiedeva.

Esempio:

Data l'equazione:

$$\mathrm{x}^2 + 2(2k-1)x + k = 0$$

determinare il valore di *k* affinchè risulti $x_1 = \frac{1}{x_2}$

$$\frac{c}{a} = \frac{k}{1}$$

$$\frac{k}{1} = 1$$

$$k = 1$$

- Se l'esercizio chiede di trovare il valore di *k* affinché risulti $x_1 \cdot x_2 = n$, poiché il Prodotto è $\frac{c}{a}$, possiamo dire che $\frac{c}{a} = n$, bisogna quindi trovare per quale valore del parametro k il prodotto nell'equazione assegnata è uguale a n e il risultato ottenuto sarà il valore di k che l'esercizio chiedeva.

Esempio:

Data l'equazione:

$$(k-1)x^2+2(-k+2)x+k+1=0$$

determinare il valore di k quando $x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4}$

$$\frac{c}{a}=\frac{k+1}{k-1}$$

$$\frac{k+1}{k-1}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{4k+4}{4(k-1)}=\frac{3k-3}{4(k-1)}$$

$$k=-7$$

- Se l'esercizio chiede di trovare **i valori da attribuire a k affinché le soluzioni siano reali**, bisogna trovare i valori di k per i quali $\Delta \geq 0$.

Esempio:

Data l'equazione:

$$(k-1)x^2-2(k+3)x+k-3=0$$

determinare quando le soluzioni sono reali.

Troviamo quando $\Delta \geq 0$

$$\Delta=(-2(\mathrm{k}+3))^2-4(k-1)(k-3)$$

$$4(\mathrm{k}^2+6k+9)-(4k-4)(k-3)\geq 0$$

$$4k^2+24k+36-4k^2+12k+4k-12\geq 0$$

$$40k+24\geq 0$$

$$40k\geq -24$$

$$k\geq -\frac{3}{5}$$

Quindi $\Delta \geq 0$ sse $\mathrm{k}\geq -\frac{3}{5}$

- Se l'esercizio chiede di trovare **i valori da attribuire a k affinché le soluzioni siano uguali** bisogna trovare i valori che k assume quando $\Delta=0$.

Esempio:

Data l'equazione:

$$(k-1)x^2-2(k+3)x+k-3=0$$

determinare i valori da attribuire a k affinchè le soluzioni siano reali.

Troviamo quando $\Delta = 0$

$\Delta = (-2(k+3))^2 - 4(k-1)(k-3)$

$4(k^2 + 6k + 9) - (4k-4)(k-3) = 0$

$4k^2 + 24k + 36 - 4k^2 + 12k + 4k - 12 = 0$

$40k + 24 = 0$

$40k = -24$

$k = -\frac{3}{5}$

Quindi $\Delta = 0$ sse $k = -\frac{3}{5}$

- Se l'esercizio chiede di **trovare i segni delle soluzioni dell'equazione**, bisogna procedere secondo la regola di Cartesio. Poiché i valori di *a, b, c* variano a seconda del valore di *k* e di conseguenza anche i loro segni e il discriminante, bisogna fare uno schema per determinarli. Innanzitutto bisogna vedere quando il discriminante (Δ) è maggiore o uguale a zero (per sapere quando può essere applicata la regola di Cartesio) e quando *a, b, c* sono maggiori di zero (per sapere quando sono positivi e quando negativi).

Esempio:

Data l'equazione:

$(k-1)x^2 - 2(k+3)x + k - 3 = 0$

determinare i segni delle soluzioni.

Troviamo quando $\Delta \geq 0$

$\Delta = (-2(k+3))^2 - 4(k-1)(k-3)$

$4(k^2 + 6k + 9) - (4k-4)(k-3) \geq 0$

$4k^2 + 24k + 36 - 4k^2 + 12k + 4k - 12 \geq 0$

$40k + 24 \geq 0$

$40k \geq -24$

$k \geq -\frac{3}{5}$

Quindi $\Delta \geq 0$ sse $k \geq -\frac{3}{5}$

Troviamo quando $a > 0$

$k - 1 > 0$

$k > 1$

Troviamo quando $b > 0$

$-2(k+3) > 0$

$k + 3 < 0$

$k < -3$

Troviamo quando $c > 0$

$k - 3 > 0$

$k > 3$

Trovati i valori che servono, si può disegnare uno schema riepilogativo. Le linee orizzontali indicano il segno che Δ, *a, b, c* assumono a seconda dei valori di *k*, mentre le linee verticali servono a individuare gli intervalli, che sono determinati dai risultati ottenuti con le disequazioni sopra fatte. Le linee orizzontali sono continue quando Δ, *a, b, c* sono positivi, mentre sono tratteggiate (o, come nell'esempio, non disegnate) quando Δ, *a, b, c* sono negativi.

Schema dell'esempio:

	-3	-3/5	+1	+3	
$(\Delta \geq 0)$	-	-	+	+	+
$(a > 0)$	-	-	-	+	+
$(b > 0)$	+	-	-	-	-
$(c > 0)$	-	-	-	-	+

Per determinare i segni si va da sinistra verso destra, (e, ma questo non necessariamente, da sopra verso sotto).

- Se
$k < -3$
Il Δ è negativo e la regola non può essere applicata.

- Se
$k = 3$
Il Δ è negativo e la regola non può essere applicata.

- Se
$-3 < k < -\frac{3}{5}$
Il Δ è negativo e la regola non può essere applicata.

- Se
$k = -\frac{3}{5}$
Il Δ è nullo e la regola può essere applicata.
a, b, c sono negativi.
Si hanno così due permanenze e le soluzioni (coincidenti) saranno negative.

- Se
$-\frac{3}{5} < k < 1$
Il Δ è positivo e la regola può essere applicata.
a, b, c sono negativi.
Si hanno così due permanenze e le soluzioni saranno entrambe negative.

- Se

$k = 1$

Il Δ è positivo e la regola può essere applicata.

a è uguale a zero e quindi l'equazione si abbassa di grado.

b, c sono negativi.

Si ha così una permanenza e le soluzione sarà negativa.

- Se

$1 < k < 3$

Il Δ è positivo e la regola può essere applicata.

a è positivo; b, c sono negativi.

Si hanno così una variazione e una permanenza.

Le soluzioni saranno una positiva e una negativa.

- Se

$k = 3$

Il Δ è positivo e la regola può essere applicata.

a è positivo; b è negativo; c è uguale a zero.

L'equazione diventa spuria e una soluzione sarà uguale a zero,

L'altra positiva, poichè c'è una variazione.

- Se

$k > 3$

Il Δ è positivo e la regola può essere applicata.

a, c sono positivi; b è negativo.

Si hanno così due variazioni.

Le soluzioni saranno entrambe positive