

AFFINITA' IN UN PIANO

Consideriamo un piano π e su di esso un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy (ai fini di quello che diremo in questo paragrafo tale ipotesi non è necessaria, ma noi la facciamo per il semplice motivo che siamo abituati a lavorare esclusivamente con tali sistemi di coordinate).

Definizione: Si chiama *affinità nel piano π* una corrispondenza biunivoca del piano in sé che ad ogni punto $P(x,y)$ associa il punto P' le cui coordinate, X e Y sono date da:

$$(1) \quad \begin{cases} X = ax + by + p \\ Y = cx + dy + q \end{cases}$$

dove a, b, c, d, p, q sono costanti reali e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si chiama *matrice dell'affinità*. Le (1) si chiamano *equazioni dell'affinità*.

Per quanto detto un'affinità T è una corrispondenza invertibile. Si può dimostrare che la corrispondenza inversa, quella che alla coppia (X,Y) associa la coppia (x,y) , che indichiamo con T^{-1} è anch'essa un'affinità.

Per le affinità valgono le seguenti proprietà (teoremi):

1. In un'affinità ad una retta corrisponde una retta (o equivalentemente, a tre punti allineati corrispondono tre punti ancora allineati).
2. In un'affinità a rette parallele corrispondono rette parallele.
3. In un'affinità a rette incidenti corrispondono rette incidenti.
4. In un'affinità è costante il rapporto delle aree corrispondenti.

Tale rapporto si chiama *rapporto d'affinità* e si può dimostrare che esso è uguale al valore assoluto del determinante della matrice A dell'affinità.

Si danno inoltre le seguenti definizioni:

Definizione: Un'affinità di equazioni (1) e matrice A è detta:

- *positiva, o diretta*, se $\det(A) > 0$;
- *negativa, o inversa*, se $\det(A) < 0$.

Definizione: Un punto (x,y) si dice *unito in un'affinità* se è il corrispondente (o immagine o trasformato) di se stesso, cioè se risulta

$$X=x, \quad Y=y.$$

Se un'affinità possiede un solo punto unito tale punto è detto *centro dell'affinità*.

Definizione: Una retta si dice *unita (o invariante o fissa)* in un'affinità se è la corrispondente di se stessa. Inoltre, se è luogo di punti uniti si dice *puntualmente unita (o puntualmente invariante o puntualmente fissa)*; altrimenti si dice *globalmente unita (o globalmente invariante o globalmente fissa)*.

Definizione: Una proprietà di una figura F si dice *invariante per una trasformazione* se essa risulta verificata anche dalla figura F' (o, come suol dirsi, si conserva nella figura F') corrispondente di F tramite la trasformazione.

Qui di seguito elenchiamo le **proprietà invarianti** per un'affinità:

1. L'allineamento di tre punti (pertanto un'affinità trasforma rette in rette).
2. Il parallelismo (pertanto un'affinità trasforma rette parallele in rette parallele, senza peraltro conservare la direzione).
3. L'incidenza (pertanto un'affinità trasforma rette incidenti in rette incidenti, senza peraltro conservare l'ampiezza degli angoli).
4. Il punto medio (pertanto il punto medio M di un assegnato segmento AB avrà come immagine, tramite l'affinità, un punto M' che risulterà essere punto medio del segmento $A'B'$ immagine, tramite l'affinità del segmento AB).

Riportiamo alcuni esempi di proprietà che **non** sono **invarianti**:

1. Distanza fra due punti (o equivalentemente, lunghezza di un segmento).
2. La direzione.
3. L'ampiezza degli angoli.

Possiamo pertanto affermare che un'affinità non conserva né le dimensioni (poiché non conserva la lunghezza) né la forma (poiché non conserva gli angoli).

Inoltre mentre è vero che in un'affinità è costante il rapporto delle aree di figure corrispondenti, non risulta, in generale, costante il rapporto di segmenti corrispondenti. Tuttavia, se due segmenti sono paralleli e hanno un certo rapporto, allora anche i loro segmenti corrispondenti hanno lo stesso rapporto; così se AB è parallelo a CD ed il loro rapporto vale k , anche il rapporto fra i segmenti corrispondenti $A'B'$ e $C'D'$ dovrà valere k .

Infine diamo la seguente definizione:

Definizione: *Si chiamano proprietà affini quelle proprietà delle figure che si conservano nelle loro immagini ottenute mediante un'affinità.*

Anticipiamo che esistono particolari affinità per le quali è costante il rapporto di due qualsiasi segmenti corrispondenti; tali affinità prendono il nome di similitudini. In virtù di quanto affermato si può dire che l'insieme delle similitudini è un sottoinsieme (proprio) di quello delle affinità.

Vogliamo provare con un esempio che un'affinità conserva il rapporto fra due segmenti paralleli (ovvero *il rapporto fra segmenti paralleli è un' invariante per un'affinità*). A tal fine consideriamo l'affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = x - y + 1 \\ Y = 2x + y - 1 \end{cases}$$

e due segmenti paralleli AB e CD di estremi $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(-1,1)$, $D(2,7)$. Si verifica facilmente che $A'(1,-1)$, $B'(0,3)$, $C'(-1,-2)$, $D'(-4,10)$ e che $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{1}{3}$.

Inoltre vogliamo segnalare un'altra proprietà delle affinità:

- *un'affinità diretta conserva il verso di percorrenza;*
- *un'affinità inversa non conserva il verso di percorrenza.*

Per convincersene basta disegnare tre punti A , B , C e i loro corrispondenti A' , B' , C' nell'affinità in esame e verificare che il verso di percorrenza ABC è lo stesso di quello $A'B'C'$ se l'affinità considerata è diretta, mentre è l'opposto nel caso in cui tale affinità è un'affinità inversa.